

## Задача 2. Мельница для наноматериалов

Одним из распространённых методов получения наночастиц является помол макроскопических материалов в мельницах. Как правило, для измельчения пробы используются массивные твёрдые шары, помещённые в специальный стакан. Помол пробы происходит в местах соприкосновения шаров, которые деформируются при взаимодействии друг с другом, под действием прижимающей силы. Теория показывает, что скорость помола пропорциональна площади соприкосновения шаров. Некоторые мельницы позволяют достигать наноразмеров для целого ряда материалов, таких как  $\text{Si}$ ,  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  и других.

Нанотехнолог Василий использовал шаровую мельницу для измельчения наночастиц оксида кремния. В качестве исходного образца он использовал водную суспензию микрочастиц, т. к. это позволило достичь более тонкого помола. После помола в течение  $t_0 = 21$  часа шарами радиуса  $R = 5$  мм, средний размер наночастиц достигал требуемых 100 нм. Василий счёл, что помол длится слишком долго и заменил шары на новые, изготовленные из того же материала, но радиуса  $r = 100$  мкм. Какое время понадобится Василию для достижения тех же средних размеров пробы (**а; 8 баллов**)? Почему Василий использовал помол жидкой пробы, а не сухой (**б; 1 балл**)? Из какого материала могли быть сделаны шары в мельнице: оксид циркония, медь, карбид вольфрама, оксид магния (**в; 1 балл**)? Поперечным растяжением шаров при деформации пренебречь.

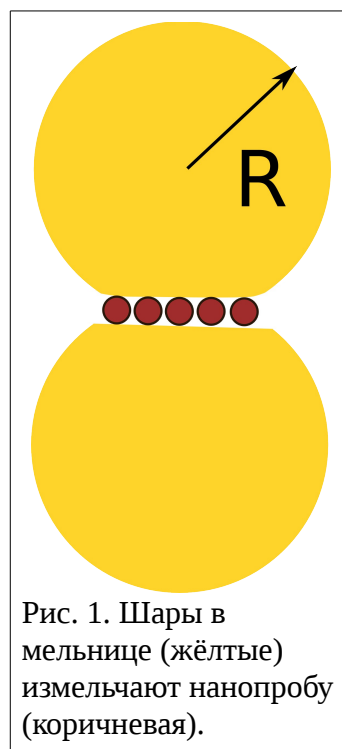


Рис. 1. Шары в мельнице (жёлтые) измельчают нанопробу (коричневая).

Решение.

а) Как известно, фактор заполнения шарами пространства не зависит от их радиуса и примерно равен 0,9. Следовательно, скорость помола пробы напрямую связана с суммарной площадью контактов между шарами в единичном объеме,  $S_{full}$ . А она пропорциональна площади одного контакта между шарами  $S$  и концентрации шаров,  $C$ .

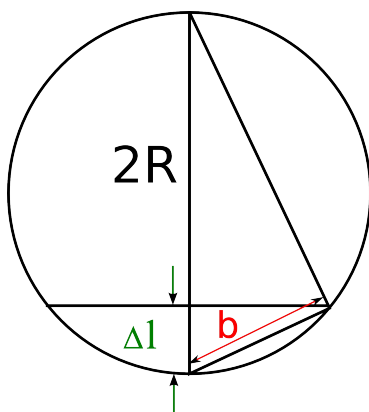
$$S_{full} \sim S C \sim \frac{S}{R^3} \quad (1)$$

Рассчитать площадь одного контакта можно исходя из выражения для модуля Юнга,  $E$ :

$$E = \frac{F l}{S \Delta l} \quad (2)$$

Формула справедлива для стержня, но в первом приближении применим её к шару. Здесь  $l$  — длина стержня, в нашем случае  $2R$ ,  $\Delta l$  — глубина деформации шаров,  $F$  — сила прижима, равная  $ma$ , где  $a$  — ускорение свободного падения для бисерных мельниц, либо ускорение стакана для планетарных, вибрационных и др. В любом случае величина  $a$  одинакова для обоих типов шаров. Если плотность шаров равна  $\rho$ :

$$E = \frac{8 \pi \rho a R^4}{3 S \Delta l} \quad (3)$$



Величину  $S$  можно рассчитать, исходя из простых геометрических соображений, считая  $\Delta l$  малой величиной:

$$b/2R = \Delta l / b;$$

$$b^2 = 2R\Delta l;$$

$$S = \pi b^2 = 2\pi\Delta l R$$

Подставляем  $S$  в (2), получаем:

$$E = \frac{4 \rho a R^4}{3 \Delta l^2 R} \quad (4)$$

Теперь нужно найти  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \sqrt{\frac{4 \rho a}{3 E}} R^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

Теперь находим  $S$ :

$$S = 2\pi \Delta l R = 2\pi \sqrt{\frac{4\rho a}{3E}} R^{\frac{5}{2}} . \quad (6)$$

Подставляем (6) в (1), получаем:

$$S_{full} \sim \frac{R^{\frac{5}{2}}}{R^3} \sim \frac{1}{\sqrt{R}} . \quad (7)$$

Отсюда окончательное выражения для искомого  $t$ :

$$t = t_0 \sqrt{\frac{r}{R}} = 21 \sqrt{\frac{1}{50}} \approx 3 \text{ часа} . \quad (8)$$

б) Использование жидкой пробы позволяет избежать избыточной агломерации наночастиц друг с другом. Поэтому помол происходит более эффективно.

в) Подходят оксид циркония и карбид вольфрама, т. к. они имеют большую твёрдость, чем у оксида кремния, из которого состоит проба. Другие материалы более мягкие, чем проба.